Examen de Matemáticas – 4º de ESO – Opción B

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

   a) $\dfrac{(x-1)(x+1)}{2}-\dfrac{x-5}{6}=\dfrac{2}{3}(x+1)$ **(1 punto)**

   b) $\dfrac{x}{x-3}+\dfrac{2x}{x+3}=\dfrac{6}{x^2-9}$ **(1,5 puntos)**

   c) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{2x+1}-1$ **(1,5 puntos)**

2. Resuelve el siguiente sistema (no lineal) de dos ecuaciones con dos incógnitas **(1,5 puntos)**:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{xy}{4}-x+y=1\\ x-\dfrac{y+7}{3}=-1\end{array}\right\}$$

3. Un comerciante compra melones a 40 céntimos el kilo y los vende a 60 céntimos el kilo. Halla cuántos kilos de melones compró si se le estropearon 10 kilos y obtuvo por la venta del resto un beneficio de 42 euros. **(1,5 puntos)**

4. Resuelve la siguiente ecuación polinómica **(1 punto)**:

$$3x^4+x^3-21x^2-25x-6=0$$

5. Hallar el valor de k para que la división del polinomio $2x^4-x^3-14x^2+kx-6$ entre $x-1$ sea exacta. Para dicho valor de k factorizar el polinomio y decir cuáles son todas sus raíces. **(2 puntos)**

Soluciones:

1. a) $\dfrac{(x-1)(x+1)}{2}-\dfrac{x-5}{6}=\dfrac{2}{3}(x+1)\Rightarrow$ (multiplicando todos los términos por 6) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 3(x-1)(x+1)-(x-5)=4(x+1)\Rightarrow 3x^2-3-x+5=4x+4\Rightarrow 3x^2-5x-2=0$.

El discriminante de esta ecuación es: $\Delta=(-5)^2-4\cdot 3\cdot(-2)=25+24=49$.

Entonces: $x=\dfrac{5\pm 7}{6}=\begin{cases} x_1=\dfrac{12}{6}=2 \\ x_2=\dfrac{-2}{6}=\dfrac{-1}{3}\end{cases}$

b) $\dfrac{x}{x-3}+\dfrac{2x}{x+3}=\dfrac{6}{x^2-9}\Rightarrow \dfrac{x(x+3)}{(x+3)(x-3)}+\dfrac{2x(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{6}{(x+3)(x-3)}\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+3x+2x^2-6x=6\Rightarrow 3x^2-3x-6=0\Rightarrow$ (dividiendo entre 3) $\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}=\dfrac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\dfrac{1\pm 3}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{4}{2}=2 \\ x_2=\dfrac{-2}{2}=-1\end{cases}$

c) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{2x+1}-1\Rightarrow\left(\sqrt{2x-1}\right)^2=\left(\sqrt{2x+1}-1\right)^2\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x-1=2x+1-2\sqrt{2x+1}+1\Rightarrow 2\sqrt{2x+1}=3\Rightarrow\left(2\sqrt{2x+1}\right)^2=3^2\Rightarrow$

$\Rightarrow 4(2x+1)=9\Rightarrow 8x+4=9\Rightarrow 8x=5\Rightarrow x=\dfrac{5}{8}$

2. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{xy}{4}-x+y=1 \\ x-\dfrac{y+7}{3}=-1\end{array}\right\}$ En primer lugar eliminemos denominadores, multiplicando todos los términos de la primera ecuación por 4 y todos los términos de la segunda por 3:

$\left.\begin{array}{l} xy-4x+4y=4 \\ 3x-y-7=-3\end{array}\right\}$ Despejando y de la segunda ecuación: $-y=-3x+4\Rightarrow y=3x-4$. Sustituyendo en la primera ecuación: $x(3x-4)-4x+4(3x-4)=4\Rightarrow$

$\Rightarrow 3x^2-4x-4x+12x-16=4\Rightarrow 3x^2+4x-20=0$. El discriminante de esta última ecuación es $\Delta=4^2-4\cdot 3\cdot(-20)=16+240=256$. Entonces:

$x=\dfrac{-4\pm 16}{6}=\begin{cases} x_1=\dfrac{12}{6}=2 \\ x_2=\dfrac{-20}{6}=\dfrac{-10}{3}\end{cases}$, y sustituyendo ahora en $y=3x-4$ se tiene:

- Si $x_1=2\Rightarrow y_1=3\cdot 2-4\Rightarrow y_1=2$
- Si $x_2=\dfrac{-10}{3}\Rightarrow y_2=3\cdot\dfrac{-10}{3}-4=\dfrac{-30}{3}-4=-10-4\Rightarrow y_2=-14$

3. Llamemos x a los kilos de melones que compró el comerciante. Como se le estropearon 10 tuvo que vender los $x-10$ que le quedaron. Además, el beneficio por kilo es de 20 céntimos y obtuvo 42 euros por los melones que vendió. Por tanto el planteamiento es: $20(x-10)=4200$ (42 euros son 4200 céntimos). Resolviendo la ecuación: $20x-200=4200 \Rightarrow 20x=4200 \Rightarrow x=\dfrac{4400}{20} \Rightarrow x=220$

   Por tanto el comerciante compró 220 kilos de melones.

4. Las posibles raíces del polinomio $3x^4+x^3-21x^2-25x-6$ están entre los divisores del término independiente: $Div(-6)=\{\pm1, \pm2, \pm-3, \pm6\}$. Apliquemos la regla de Ruffini:

	3	1	-21	-25	-6
-1		-3	2	19	6
	3	-2	-19	-6	0
-2		-6	16	6	
	3	-8	-3	0	
3		9	3		
	3	1	0		

   Entonces la ecuación $3x^4+x^3-21x^2-25x-6=0$ es equivalente a la ecuación $(x+1)(x+2)(x-3)(3x+1)=0$, de donde

   $x+1=0 \Rightarrow x=-1$, $x+2=0 \Rightarrow x=-2$, $x-3=0 \Rightarrow x=3$ (obsérvese que estas tres soluciones coinciden con las tres raíces del enteras del polinomio), y $3x+1=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{3}$

5. Utilizando el teorema del resto:

   $P(1)=0 \Rightarrow 2-1-14+k-6=0 \Rightarrow k-19=0 \Rightarrow k=19$

   Para este valor de *k* el polinomio es $2x^4-x^3-14x^2+19x-6$. Utilizando la regla de Ruffini:

	2	-1	-14	19	-6
1		2	1	-13	6
	2	1	-13	6	0
2		4	10	-6	
	2	5	-3	0	
-3		-6	3		
	2	-1	0		

   Por tanto la factorización del polinomio es $(x-1)(x-2)(x+3)(2x-1)=0$ y las raíces del mismo son 1, 2, -3 y $\dfrac{1}{2}$ (observa que la última raíz es la solución de la ecuación $2x-1=0$).